LJAST
Libya Journal Applied For Science and Technology
مجلة ليبيا للعلوم التطبيقية والتقنية

Volume 5.Issue1
December2018

تحويلات لإبلاس وتطبيقاتها الهندسية

منصور الزناتي 1.محمد الغروس 2. عبد النبي البوسيفي 3. عادل التميمي4
القسم العام –كلية التقنية الهندسية \جنزور

الملخص:

في هذه الورقة تم تعريف تحويلة لإبلاس وتوضيح أهميتها قبل اختراع الحاسب الآلي ، وفي استخداماتها الآن في شتى العلوم مثل الرياضيات و الميكانيكا و الاقتصاد و الزراعة وفي مجال التحكم الآلي وفي حل مسائل الدوائر الكهربائية والالكترونية والإشارات والنظم الكهربائية و الإشارات الكهربائية الرقمية وأنظمة التحكم ذات الدائرة المغلقة أو المفتوحة .وبينا الشروط الكافية لوجودية تحويلة لإبلاس ، كما أوضحنا طريقة عمل هذه التحويلة وفكرتها المبدعة حيث وجدنا بأنها تحول المعادلة التفاضلية إلى معادلة جبرية يمكن حلها ثم يتم وباستخدام تحويلة لإبلاس العكسية نصل إلى النتيجة بكل سهولة ويسر. وبينا أهم مميزاتها حيث يمكن إيجاد الحلول الخاصة للمعادلات التفاضلية مباشرة بدون ضرورة لإيجاد الحل العام مسبقا وان تحويلة لإبلاس تحل المعادلات التفاضلية اللامتجانسة دون الضرورة لحل المعادلات المتجانسة المناظرة أولاً، كما تطبق في حالة الدوال المتصلة والدوال المتقطعة والدورية الصعبة المعقدة والدرجية. وذكرنا في هذه الورقة النظريات والمبرهنات والقواعد التي تعتمد عليها تحويلة لإبلاس وكونا جدولا لتحويلة لإبلاس وآخر لتحويلة لإبلاس العكسية، ثم حللنا أمثلة كتطبيقات في مسائل المعادلات التفاضلية بمعاملات ثابتة ومعاملات متغيرة وفي الفيزياء والدوائر الكهربية وفي الاهتزازات الميكانيكية وفي المعادلات التفاضلية الآنية.

الكلمات الاستدلالية: -التحويلة -لإبلاس– المعادلة التفاضلية – المعادلات الآنية-تطبيقات تحويلة لإبلاس.

بند 1 المقدمة:

عاش بيير لإبلاس في الفترة من سنة (1749 -1827م) وهو فرنسي الجنسية وأحد الرياضيين المشاهير على مستوى العالم حتى أنه يلقب (نيوتن فرنسا) وهو معلم نابليون بونابرت وقد تم تعيينه وزيرا للتعليم في فترة حكم نابليون ولكن نظرا لاتجاهه الأكاديمي الرياضي ترك الوظيفة وتفرغ للعلم الرياضي ومن أهم إعماله كانت في مجال التفاضل والتكامل ونظرية الاحتمالات وفي الميكانيكا، وقد كان لمعادلات لإبلاس وتحويلات لإبلاس الأساس النظري لنظرية هيفيسيد وكذلك كانت أساس في صياغة طرق وعمليات حساب التفاضل والتكامل.

ويجب ان نفهم أن لكل رياضي في أي حضارة خصوصية مميزة وبيئة محلية وتقاليد خاصة خصوصا في الحضارات الراقية والمتفوقة فالحضارة هي التي تضع المبادئ والأهداف وفق أسس محدده وبمناهج ملائمة والوعي بهذه الحقيقة نابعا من إحساسنا الخاص بالماضي والمستقبل رغم اختلاف اتجاههما فهما لا يتقابلان في الحاضر فحسب بل هما يشكلان الحاضر على نحو معين لذلك فان نسيان الماضي وإلغاء المستقبل والعيش في الحاضر يعتبر سلوك غير سوي بالنسبة للفرد أو للمجتمع أو الحضارة [3].

1-1 أهداف البحث:

يهدف البحث إلى تعريف تحويل لإبلاس وأهميته وخصائصه ومبرهناته والتعرف على جدول تحويل لإبلاس وجدول لإبلاس العكسي لبعض الدوال المهمة وكذلك حل المعادلات التفاضلية باستخدام تحويل لإبلاس وتحويلها من معادلات تفاضلية إلى معادلة جبرية.

ولتحويلات لإبلاس أهمية كبيرة لأنه بواسطتها يمكن إيجاد حلول المسائل الميكانيكية والكهربائية وخاصة في مجال التحكم الآلي وفي حل مسائل الدوائر الكهربائية والالكترونية والإشارات والنظم الكهربائية سواء التماثلية منها أو الإشارات الكهربائية الرقمية وأنظمة التحكم ذات الدائرة المغلقة أو المفتوحة.

ايضا تطبيق تحويلة لإبلاس في مسائل القيم الابتدائية والتي تحتوي معادلات تفاضلية عادية او جزئية الى حل مسائل جبرية (بأي شروط ابتدائية).

1-2 حدود البحث:

1 -بيان أهمية تحويله لإبلاس في حل الكثير من المسائل المعقدة.
2 -استخدام تحويلة لإبلاس في حل بعض المسائل الهندسية.

بند 2-تعريف تحويلة لإبلاس[6]. $Laplace Transform (L.T)$

هي أداة رياضية تستخدم لحل مسائل الدوائر الكهربية معطى فيها مجموعة من الشروط الابتدائية (أي تحويل المعادلات التفاضلية - التكاملية في مجال الزمن الى معادلات جبرية بسيطة) ثم إرجاعها بواسطة تحويلة لإبلاس العكسية إلى مجال الزمن وكذلك في المسائل الهندسية وغيرها.

2-1 قواعد أساسية لتحويلات لإبلاس لبعض الدوال المهمة: [6].

$$L(K)=\int_0^\infty K.e^{-st}dt=K\int_0^\infty e^{-st}dt=\frac{K}{s},k\in R$$

$$L(e^{-at})=\int_0^\infty e^{-at}.e^{-st}\,dt=\int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt=\frac{1}{s+a}\ ,a\in R$$

$$L(t^n)=\int_0^\infty t^n\, e^{-st}\,dt=\frac{\Gamma(n+1)}{S^{n+1}}=\frac{n!}{S^{n+1}}$$

$$L(sinat)=\int_0^\infty e^{-St}Sinatdt=\frac{a}{S^2+a^2}$$

$$L(Cosbt)=\int_0^{\infty} e^{-St}Cosbt\,dt=\frac{S}{S^2+b^2}$$

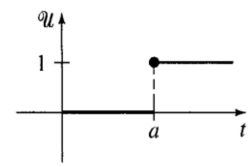
$$L(sinhat)=\int_0^{\infty} e^{-St}Sinhat\,dt=\frac{a}{S^2-a^2}$$

$$L(Coshbt)=\int_0^{\infty} e^{-St}Coshbt\,dt=\frac{S}{S^2-b^2}$$

2-2 تحويلة لإبلاس لدالة الخطوة[3]:

دالة الخطوة هي دالة ثابتة ولا تتغير مع الزمن ويمكن تمثيلها في التطبيقات العملية بإشارة الجهد المدخل لنظام التحكم تكون قيمته صفر وذلك قبل التشغيل وتصبح له قيمة معينة وثابتة بعد التشغيل وتمثل بصورة رياضية كالآتي:

$$(t) = u(t-a) = \begin{cases} 1 & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$



شكل (1)

وتحويل لإبلاس لدالة الخطوة هو:

$$Lf(t)=L(u(t\text{-}a))=\frac{e^{-as}}{s}$$

لايجاد فمثلا $L(tu(t-3))$ نقوم بالآتي:

$$L(tu(t-3))= L(t-3)+3)u(t-3))$$
$$= L(t-3)\,u(t-3)+L3u(t-3)$$
$$=\frac{e^{-3s}}{s^2}+\frac{3e^{-3s}}{S}=\frac{(1+3S)e^{-3s}}{s^2}$$

3.2-دالة الخطوة The Heavisidś - unit-step function

$$\text{Theorm: If } G(t)=\begin{cases} f_{1(t)} & 0<t<a \\ f_{2(t)} & a<t<b \\ f_{3(t)} & t>b \end{cases}$$

وتكتب: $G(t)=f_1+(f_2-f_1)u(t-a)+(f_3-f_2)u(t-b)$

$$LG(t)=Lf_1+L(f_2-f_1)u(t-a)+L(f_3-f_2)u(t-b$$

4-2 تحويلة لا بلاس لدالة الانحدار[5]:

دالة الانحدار هي دالة متغيرة مع الزمن أي أنها تتزايد معه ويمكن تمثيلها في التطبيقات العملية بإشارة المدخل للدوائر الالكترونية والتي تتزايد مع الزمن ويعبر عنها رياضيا كالآتي:

ويكون تحويل لإبلاس لهذه الدالة كالاتي:

$$L[f(t)] =$$

$$\int_0^{\infty} Kte^{-St}dt \quad \therefore F(s)=\frac{K}{s^2}e^{-st}\Big|_0^{\infty}=\frac{K}{S^2}\left[e^{-\infty}-e^{-0}\right]=\frac{K}{S^2}$$

$$L[f(t)]=F(S)=\frac{K}{s^2}\ ,\text{if } K=1 \text{ then } F(s)=\frac{1}{S^2}$$

5-2 تحويل لإبلاس للدالة الاسية[1]:

$$f(t)=\begin{cases} e^{-kt}, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$ والصورة الرياضية لها هي L

$$[f(t)]=\int_0^{\infty} e^{-kt}e^{-st}dt=\int_0^{\infty} e^{-(s+k)t}dt$$

$$\therefore F(s)=\frac{1}{s+k}e^{-(s+k)t}\Big|_0^{\infty}=-\frac{1}{s+k}\left[e^{-\infty}-e^{-0}\right]$$

$$=-\frac{1}{s+k}[0-1]$$

$$L[f(t)]=F(s)=\frac{1}{s+k}$$

بند 3: تحويلات لا بلاس للتفاضل[9]:

1.3: مبرهنة التفاضل الزمني

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=SF(s)-f(0)$$

$$L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right]=S^2F(S)-Sf(0)-f'(0)$$

حيث يمكن حل كلا من $L\left[\frac{d^2(e^{-kt})}{dt^2}\right]$ ، $\mathcal{L}\left[\frac{d(e^{-kt})}{dt}\right]$ كما يلي:

$$L\left[\frac{d(e^{-kt})}{dt}\right]=SL[e^{-kt}]-e^{-k(0)}=S\frac{1}{S+k}-1=\frac{-k}{s+k}$$

$$L\left[\frac{d^2(e^{-kt})}{dt^2}\right]=S^2L[e^{-kt}]-Se^{-k(0)}-(-ke^{-k(0)}=\frac{s^2}{s+k}-s+k=\frac{k^2}{s+k}$$

3 -2: مبرهنة القيمة الابتدائية إذا كانت النهاية لها وجود[9]:

$$\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{s\to\infty} SF(S)\ \ , \text{if limit exists}$$

وبرهان مبرهنة القيمة الابتدائية للدالة $f(t)=u(t)$

$$\lim_{t\to 0} u(t)=u(0)=1 \rightarrow \lim_{S\to\infty} SL[u(t)]=\lim_{s\to\infty} S.\frac{1}{s}=1$$

3-3: مبرهنة القيمة النهائية [9]:

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{S\to 0} SF(s), \text{if } \lim \text{ it.Exists.}$$

$$f(t)=e^{-kt}u(t)$$

ويمكن برهان مبرهنة القيمة النهائية للدالة:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-kt}u(t)=e^{-k(\infty)}u(\infty)=(0)(1)=0$$

LJAST
Libya Journal Applied
For Science and
Technology
مجلة ليبيا للعلوم التطبيقية والتقنية

Volume 5.Issue1
December2018

$$\lim_{x\to 0} S\,L[e^{Kt}u(t)]=\lim_{S\to 0} S.\frac{1}{S+k}=(0)\left(\frac{1}{0+k}\right)=0$$

3 -4: مبرهنة تفاضل التردد [9]:

$$L[tf(t)]=-\frac{dF(s)}{ds}$$

بند 4: تحويلات لإبلاس للتكاملات[2]:

في بعض التطبيقات فان سلوك نظام قد يمثله معادلة تفاضلية ـ تكاملية والتي تكون معادلة تحتوي تكاملات وتفاضلات لمتغير مجهول مثل التيار في متسلسلة دائرة كهربية تحتوي مقاومة وحث ذاتي وسعة ويؤثر

في التطبيق فرق جهد يعطى بالمعادلة:

$$L\frac{di}{dt}+iR+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau=E$$

ولحل مثل هذه المعادلات مباشرة فانه من المناسب أن نكون قادرين على استنتاج تحويلة لا بلاس للتكاملات مثل:

بكتابة $\int_0^t f(\tau)d\tau$ $g(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$

ويكون لدينا $g(0)=0$ ، $\frac{dg}{dt}=f(t)$

و هى باستعمال $\mathcal{L}\left\{\frac{dg}{dt}\right\}$ $\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\}=SF(s)-f(0)$

$$=\mathcal{L}\{f(t)\}$$

وبأخذ تحويلة لإبلاس:

$SG(s)=$ أو $\mathcal{L}\{g(t)\}=G(s)=\frac{1}{s}F(s)=\frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}$

تعطي $F(s)$

والتي تقود الى النتيجة:

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{S}L\{f(t)\}=\frac{1}{S}L\,F(s)$$

4 -1: مبرهنة التكامل الزمني[2]:

$$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{s}F(s)$$

في هذه الحالة : $f(t)=t^3+sin2t$ لتعطي:

$$F(s)=L\{f(t)\}=L\{t\}+L\{sin2t\}=\frac{6}{S^4}+\frac{2}{S^2+4}\ldots(1)$$

بواسطة: $L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\}=\frac{1}{S}L\{f(t)\}=\frac{1}{S}L\,F(s)$

$$L\left\{\int_0^t f(\tau^3+sin2\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{S}F(S)=\frac{6}{S^2}+\frac{2}{S(S^2+4)}$$

4 - 2: مبرهنة تكامل التردد[2]:

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^\infty F(\tilde{S})d\tilde{S}$$

اذا كانت $L\left[\frac{e^{kt}-e^{-kt}}{t}\right]$ فان :

$$L\left[\frac{e^{kt}-e^{-kt}}{t}\right]=L\left[e^{kt}-e^{-kt}\right]d\tilde{s}=\int_s^\infty\left(\frac{1}{\tilde{s}-k}-\frac{1}{\tilde{s}-k}\right)d\tilde{s}$$

$$=\ln\left(\frac{\tilde{s}-k}{(\tilde{s}+k)}\right)\Bigg|_0^\infty=\lim_{\tilde{s}\to\infty}\left(\frac{\tilde{s}-k}{\tilde{s}+k}\right)-\ln\left(\frac{s-k}{s+k}\right)=\ln\left(\frac{s-k}{s+k}\right)$$

بند5 : تحويلات لإبلاس العكسية [7]:

$$L^{-1}(f(s)e^{-as})dt=f(t-a)u(t-a)\ ,\ t>a$$

بند 6: تحويلات لإبلاس العكسية للتفاضل [7]:

6-1: مبرهنة

$$L^{-1}\left(\frac{f(s)}{S^n}\right)=\int_0^t\int_0^t\int_0^t\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\int_0^t f(t)d^n t\ldots$$

فمثلا لايجاد $L^{-1}\left(\frac{1}{S^2(s^2+4)}\right)$

$$L^{-1}\left(\frac{\frac{1}{(s^2+4)}}{S^2}\right)=\int_0^t\left(\int_0^t\frac{1}{2}sin2tdt\right)dt$$

$$=\int_0^t\left[\frac{-cos2t}{4}\right]_0^t dt=\frac{1}{4}\int_0^t(1-cos2t)dt$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{S^2(s^2+4)}\right)=\frac{1}{4}\left[t-\frac{sin\,2t}{2}\right]=\frac{1}{8}[2t-sin\,2t]$$

6-2: مبرهنة

$$L^{-1}(f(s)e^{-as})=f(t-a)u(t-a)\ ,\ t>a$$

بند 7: تطبيقات رياضية لحل المعادلات التفاضلية بواسطة تحويلات لإبلاس:

نفرض تحويلات لإبلاس للتفاضل والتكامل ثم بعد ذلك نستخدم تحويلات لإبلاس لحل المعادلات التفاضلية،

وايضا نحتاج لإيجاد مقادير مناسبة لتحويلات التفاضلات [7]:

مثل $\frac{df}{dt}$ ، $\frac{d^2f}{dt^2}$ عامة وبصفة $\frac{d^nf}{dt^n}$

وبالتعريف $L\left\{\frac{df}{dt}\right\}=\int_0^\infty e^{-st}\frac{df}{dt}\,dt$ و بالتكامل بالتجزئ ينتج

$$L\left\{\frac{df}{dt}\right\}=[e^{-st}f(t)]_0^\infty+S\int_0^\infty f(t)dt=-f(0)+SF(s)$$

ولذلك يكون $L\left\{\frac{df}{dt}\right\}=SF(s)-f(0)$

عند إيجاد تحويلات لإبلاس للتفاضل فإننا f(t) متصلة عند t=0 فرضنا أن

ولذلك فان $f(\bar{0})=f(0)=f(0^+)$.

والمميزات لتحويلات لإبلاس عند تطبيقها لحل المعادلات التفاضلية يمكن ملاحظتها جليا لأنها تمكننا من: -

LJAST
Libya Journal Applied For Science and Technology
مجلة ليبيا للعلوم التطبيقية والتقنية

Volume 5.Issue1
December2018

استبدال عملية (t) بعملية جبرية بسيطة في مجال المتغير (S). التفاضل في

متصلة $L\left\{\frac{df}{dt}\right\}=SF(s)-f(0)$ فأننا ان فرضنا $f(t)$ ولاحظ انه

وبالمثل $f(t)$ و $\frac{d^2f}{dt^2}$ المتصلة مقطعيا $t\geq 0$.

$$L\left\{\frac{d^2f}{dt^2}\right\}=\int_0^\infty \frac{d^2f}{dt^2}dt=\left[e^{-st}\frac{df}{dt}\right]_0^\infty+S\int_0^\infty e^{-st}\frac{df}{dt}dt=-\left[\frac{df}{dt}\right]_{t=0}+SL\left\{\frac{df}{dt}\right\}$$

$L\left\{\frac{d^2f}{dt^2}\right\}=-\left[\frac{df}{dt}\right]_{t=0}+S[Sf(s)-f(0)]$ وهي باستعمال تحويلة لإبلاس لتعطي:

$$=S^2F(s)-sf(0)-\left[\frac{df}{dt}\right]_{t=0}=S^2F(s)-Sf(0)-\acute{f}(0)$$

في الصورة العامة: $f^n(t)=\frac{d^nf}{dt^n}$ ونستنتج تحويلة لإبلاس لـ

$$L\{f^n(t)\}=S^nF(s)-S^{n-1}f(0)-S^{n-2}f^{(1)}(0).....-f^{(n-1)}(0)$$

$$=S^nF(s)-\sum_{i=1}^{n}S^{n-i}f^{(i-1)}(0)$$

والتي يمكن برهنتها بالاستنتاج الرياضي.

ومرة أخرى يلاحظ أنه لإيجاد تحويلة لإبلاس للتفاضل بصورة عامة فرضنا $f^{(n-1)}(t)$ متصلة.

بند 8: حل المعادلات التفاضلية بمعاملات ثابته [12]:

إذا كان لدينا المعادلة التفاضلية

$$y''-3y'+2y=4e^{2t}\quad y(0)=-3,\quad y'(0)=5$$

بالتالي يمكن تطبيق تحويلات لإبلاس كما يلي:

$$\ell(y'')-3\ell(y')+2\ell y=4\ell(e^{2t})$$

$$[S^2f(s)-Sf(0)-f'(0)]-3[Sf(s)-f(0)]+2f(s)=\frac{4}{S-2}$$

$$f(s)=\frac{4}{(S-2)^2(S-1)}+\frac{14-3S}{(S-2)(S-1)}$$

$$\frac{-3S^2+20S-24}{(S-2)^2(S-1)}=\frac{A}{S-2}+\frac{B}{(S-2)^2}+\frac{C}{S-1}$$

$$Hence.\Rightarrow .A=B=4,C=-7$$

$$f(t)=\ell^{-1}\left(\frac{-3S^2+20S-24}{(S-2)^2(S-1)}\right)=\ell^{-1}\left(\frac{4}{S-2}\right)+\ell^{-1}\left(\frac{4}{(S-2)^2}\right)+\ell^{-1}\left(\frac{-7}{S-1}\right)$$

$$f(t)=4e^{2t}+4te^{2t}-7e^{t}$$

بند 9: حل المعادلات التفاضلية بمعاملات متغيرة [10]:

وهنا يتم تطبيق تحويلات لإبلاس للمعادلة التالية:

$$ty''+2y'+ty=0,\quad y(0)=1,\quad y(\pi)=0$$

$$let.....y'(0)=C$$

$$L(ty'')+2L(y')+L(ty)=0$$

$$\frac{d[S^2f(s)-Sf(0)-f'(0)]}{ds}+2[Sf(s)-f(0)]-\frac{d}{dS}(f(s))=0$$

$$\frac{d}{ds}(S^2f(s)-S-C)-2[Sf(s)-1]+\frac{d}{ds}(f(s))=0$$

$$[S^2f'(s)+2Sf(s)-1]-2Sf(s)+2+f'(s)=0$$

$$\Rightarrow (S^2+1)f'(s)=-1\Rightarrow f'(s)=\frac{-1}{(S^2+1)}$$

$$L^{-1}f'(s)=-L\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\Rightarrow -tf(t)=-\sin t\Rightarrow f(t)=\frac{\sin t}{t}$$

بند 10: تطبيقات فيزيائية وكهربائية [8]:

Applications of Physical and electrical System

1-10 الدوائر الكهربية:

الدوائر الكهربية المعروفة تتركب من ثلاثة عناصر أساسية هي:

(1) المقاومات (لديها مقاومة R تقاس بالأوم ohms).

(2) مكثفات (لديها سعة C تقاس بالفاراد F) .

(3) موصلات (لديها حث ذاتي). مع متغيرات مساعدة H يقاس بالهنري L ويقاس بالفولت. V (t) وفرق الجهدAويقاس بالأمبير i(t)هي التيار C والتي تقاس بالكولوم q (t) والتيار الكهربي في الدائرة له علاقة بالشحنة

2-10 قوانين كرشوف: $kirchhoff's..Laws$

القانون الاول: المجموع الجبري لكل التيارات الداخلة في أي رابط (او عقدة) من دائرة يساوي صفر.

القانون الثاني: المجموع الجبري لفروق الجهد حول $(Loop)$ أي مسار مغلق (او ممر) في الدائرة يساوي صفر

واستعمال هذه القوانين يقود الي معادلات دوائر كهربية والتي يمكن تحليلها بطرق تحويلات لإبلاس[4].

$$(1) - R\frac{dq}{dt} + L\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right) + \frac{q}{C} = V$$

$$(2) - iR + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{c}\int idt = V \qquad i = \frac{dq}{dt}$$

$$(3) - L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V$$

بند 11: تطبيقات ميكانيكية[1]:

11-1 الاهتزازات الميكانيكية: *Mechanical Vibration*

تتكون المنظومة الميكانيكية من ثلاثة عناصر أساسية هي:

(1) الكتلة ***masses*** (وتقاس بالكيلو جرام)

(2) السلك الزنبركى (له ثابت قوة يقاس بـ $\boldsymbol{Nm^{-1}}$)

(3) المخمد (له معامل اخماد ***B*** يقاس بـ $\boldsymbol{N\,sm^{-1}}$)

وهناك ايضا المتغيرات المشاركة وهي:

الازاحة $\mathbf{X(t)}$ وتقاس ،بالمتر والقوة $\mathbf{F(t)}$ وتقاس بالنيوتن **N**

والعلاقات بين القوة والإزاحات في زمن t تكون:

$$mass : F = M\frac{d^2x}{dt^2} = M\ddot{X}\,(Newton'sLaw)$$

$$Spring : F = K(x_2 - x_1)(HooKe'sLaw)$$

$$damper : F = B\left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right) = B(x_2' - x_1')$$

وباستعمال هذه العلاقات تقودنا الي نظام معادلات والتي يمكن تحليلها باستخدام طرق تحويلات لإبلاس.

بند 12: تطبيقات تحويلة لإبلاس على حل نظام المعادلات التفاضلية الآنية [8]:

يمكن استخدام تحويلة لإبلاس في حل نظام أو (عائلة)من المعادلات من المتغيرات المرتبطة والتي تكون دوال t التفاضلية العادية الآنية. عددها (m) في (m) في المتغير المستقل

بفرض عائلة من معادلتين آنيتين في x, y والتي تعتبر دوال في t . متغيرين

$$a_1\frac{d^2x}{dt^2} + a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a_3\frac{dx}{dt} + a_4\frac{dy}{dt} + a_5x + a_6y = R_1(t) \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$b_1\frac{d^2x}{dt^2} + b_2\frac{d^2y}{dt^2} + b_3\frac{dx}{dt} + b_4\frac{dy}{dt} + b_5x + b_6y = R_2(t) \ldots\ldots\ldots(2)$$

with intial condition; $x(0)=c_1$, $y(0)=c_2$,$\acute{x}(0)=c_3$,$\acute{y}(0)=c_4$ ….(3)

ثوابت $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_5, a_6, b_1, b_2, \ldots, b_5, b_6, c_1, c_2, c_3, c_4$

في دوال t ، $R_1(t)$, $R_2(t)$

12-1 حل المعادلات التفاضلية الآنية باستخدام تحويلة لإبلاس[11]:

الخطوة الأولى: تطبيق تحويلة لإبلاس على طرفي كل معادلة تفاضلية (1)، (2) وهذا يحول المعادلتين التفاضليتين الى معادلتين جبريتين في

$y(S)$, $x(S)$ حيث:

$$y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}\ , x(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

$$a_1\{S^2x-Sx(0)-\acute{x}(0)\}+a_2\{S^2y-Sy(0)-\acute{y}(0)\}+a_3\{Sx-x(0)\} + a_4\{sy-y(0)\} + a_5x+a_6y=Q_1(s)\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$b_1\{S^2x-Sx(0)-\acute{x}(0)\}+b_2\{S^2y-Sy(0)-\acute{y}(0)\}+b_3\{Sx-x(0)\} + b_4\{sy-y(0)\}+b_5x+b_6y=Q_2(s)\ldots\ldots\ldots(5)$$

وباستعمال الشروط الابتدائية والتعويض في (1)، (2).

الخطوة الثانية :نحل المعادلتين (5) ،(4)لإيجاد $y(s), x(s)$

الخطوة الثالثة: الحل اللازم يمكن استنتاجه بإيجاد لإبلاس العكسي لـ: y(s) , x(s)

$$\therefore x(t)=L^{-1}\{x(s)\} \quad , \ y(t)=L^{-1}\{y(s)\}$$

الخلاصة:

نلاحظ من نتائج هذا البحث ان تحويلات لإبلاس لحل المعادلات التفاضلية تعتبر أداة قيمة وميسرة سواء للدراسة أو للتدريس، ونلخص النتائج في التالي:

1-تؤكد الدراسة أن طريقة تحويل لإبلاس تعتبر من أيسر الطرق لحل المعادلات لأنها تعطي الحل العام مباشرة دون الحاجة الى الحل الخاص.

2 - بينت الدراسة أن تحويل لإبلاس يساعد الباحثين في مختلف التخصصات على حل المعادلات بسهولة.

التوصيات:

1 - اجراء بحوث في الطرق التي تسهل حل المعادلات سواء هذه الطرق النظرية مثل تحويلات فورير أو باستخدام الطرق العددية.

- تعميم طريقة تحويلات لإبلاس في كل الدراسات سواء كانت هندسية أو علمية او اقتصادية أو في مجال العلوم الحيوية لحل المعادلات من مختلف الرتب.

المـــــراجع

(1)محمد محمد عباس ـ المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها الهندسية ـ منشأة المعارف الإسكندرية 1980.
(2) - وليم بوليس , ريتشارد ديريما ترجمة : أحمد علاونه , حسن العزة " مبادئ المعادلات التفاضلية " مركز المكتب الأردني (1990).
(3) ـ نظلة حسن أحمد خضر " أصول تدريس الرياضيات " كلية التربية جامعة عين شمس (1974).
(4) داخل حسن جريو " هندسة التحكم الالي " البصرة (1984).
(5) Lymanm , Kells “ elementary diferential Mcgraw Hill kogukusha “ (1954).
(6) Murray, R.Spiegel “theory and problems of laplace transforms “ schaumout line series Mcgraw Hill (1965).
(7) Peter,oneil “ advanced engineering mathematics “ Wads worth publishing company (1986).
(8) Glyn, James and others “ modern engineering mathematics “ Prentice Hail Pearson (2010).
(9) B.V.Ramana “ higher engineering mathematics “ Tata Mcgraw , Hill eduction private (2012).
(10) Circuits and Singav Ect2036 page(1-59) “Multi-Media university-Notes”(2012)
(11) Dennis.G.Zill “first course in differential equation with modeling applications” (1980).
(12) Ogata.K “ modern control engineering “ Prentice Hall (1970) .